Definition of Fundamental Group

A *path* α in a space X is a continuous map $\alpha : [0,1] \to X$.

정의 1 Given two paths α and β in X with the same end points, ie, $\alpha(0) = \beta(0)$ and $\alpha(1) = \beta(1)$.
α is *path homotopic* to β, denoted by $\alpha \sim \beta$, if $\alpha \overset{F}{\simeq} \beta$ rel ∂I = {0,1} ,
i.e., $\exists\ F : I \times I \to X$ such that

1. F(t,0) = $\alpha(t), \forall t \in I$.
2. F(t,1) = $\beta(t), \forall t \in I$.
3. F(0,s) = $\alpha(0)$, F(1,s) = $\alpha(1), \forall s \in I$.

In general for f and g :$X \to Y$ with $f(a) = g(a)$ for $a \in A \subset X$,
f is *homotopic to* g (denoted by $f \simeq g$) relative to $A \subset X$,
if $\exists$ a map $F : X \times I \to Y$ such that

1. F(x,0) = $f(x), \forall x \in X$.
2. F(x,1) = $g(x), \forall x \in X$.
3. F(a,s) = $f(a) = g(a), \forall a \in A$.

Note. $\sim$ is an equivalence relation.

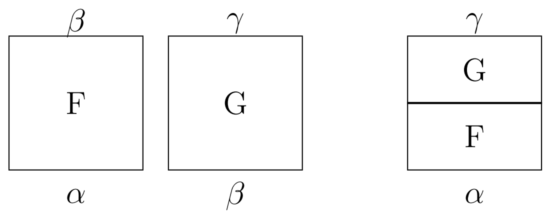
(reflexive) $\alpha \sim \alpha$

(symmetric) $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$:
$\alpha \sim \beta$를 주는 homotopy F에 대해 G(t,s)=F(t,1-s)로 주면 이는 $\beta \sim \alpha$ 를 만족하는 homotopy가 된다.

(transitive) $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$:
F: homotopy between α and β, G: homotopy between β and γ 라 하자. 이 때, H를

$$H(t,s) = \begin{cases} F(t,2s) & \text{if } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(t,2s-1) & \text{if } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

로 두면 H 는 α 와 γ 사이의 homotopy가 된다.



정의 2 (i) 두 개의 path α, β with $\alpha(1) = \beta(0)$에 대해서 $p$roduct path $\alpha * \beta$는 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{if } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{if } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

(ii) $\Omega(X, x_0) := \{\alpha : I \to X \mid \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$: loop space of X based at x_0

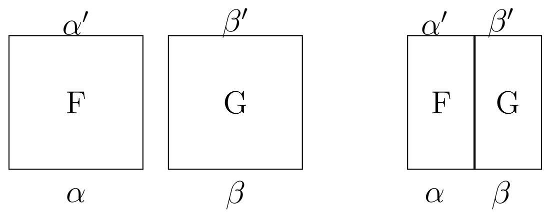
Introduce a group structure on $\Omega/\sim$:
(a) group operation은 $[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta]$

이 곱이 $\Omega/\sim$ 에서 잘 정의가 된다는 것을 보이자.
즉 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta' \Rightarrow \alpha * \beta \sim \alpha * \beta'$임을 보이면 충분하다.
F를 α, α'의 homotopy, G를 β, β' 의 homotopy로 두면

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{if } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(2t-1, s) & \text{if } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

가 $\alpha * \beta, \alpha' * \beta'$ 사이의 homotopy 를 준다.

그러므로 $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$는 $\Omega/\sim$에서 잘 정의되었다.



(b) *Associativity* $([\alpha] \cdot [\beta] \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma])$:

$(\alpha * \beta) * \gamma$ 와 $\alpha * (\beta * \gamma)$ 는 사실상 같은 path 의 reparametrization이므로 다음 Note만 보이면 된다.

Note. In general, if $\beta(t) = \alpha(\phi(t))$ where $\phi : I \to I$ with $\phi(0) = 0$ and $\phi(1) = 1$, is a *reparametrization*, then $\alpha \sim \beta$.

(증명) F(t,s) : $= \alpha(s\phi(t) + (1-s)t)$ 는 연속이고
$F(t,0) = \alpha(t)$, $F(t,1) = \alpha(\phi(t)) = \beta(t)$ 사이에 원하는 homotopy를 준다.

(c) Existence of an identity e:

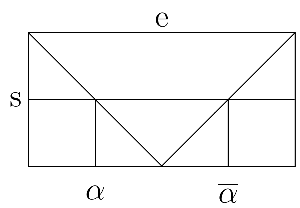
Let I $\to \{x_0\} \subset X$ (a constant loop). 그러면$\alpha * e$ 는 α의 reparametrization이므로 위의 Note에 따라 $\alpha * e \sim \alpha \sim e * \alpha$.

(d)Existence of an inverse:

Given $\alpha \in \Omega$, define $\overline{\alpha}(t) := \alpha(1-t)$. Then we show that $\alpha * \overline{\alpha} \sim e \sim \overline{\alpha} * \alpha$.
이것을 보이기 위해 $F : I \times I \to X$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$F(t,u) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{if } 0 \leq u \leq 1-2t \\ \overline{\alpha}(2t-1) & \text{if } u \leq 2t-1 \\ \alpha(1-u) = \overline{\alpha}(u) & \text{if } u \geq |1-2t| \end{cases}$$

그러면 F는 연속이고 $\alpha * \overline{\alpha}$와 e 사이에 homotopy를 준다. 같은 방법으로 $\overline{\alpha} * \alpha \sim e$ 도 역시 보일 수 있다.



정의 3 *(The fundamental group.)*
$\pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0)/\sim$을 X의 fundamental group (based at x_0)라고 부른다.